# Vektor tangente

Neka je data kriva $L$ u prostoru zadana parametarski na sljedeći način

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

(u skalarnom obliku)

i neka tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada $L$.

Jednačina tangente na krivu $L$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi

$$t: \frac{x - x_0}{t_1} = \frac{y - y_0}{t_2} = \frac{z - z_0}{t_3}$$

gdje je $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3) \neq \vec{0}$ vektor tangente.

Ako je kriva data u vektorskom obliku $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tada je

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} \quad \left( \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

# Odrediti jednačinu tangente krive $L: x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $z = 4a \sin\frac{t}{2}$ u tački $M_0(t=\frac{\pi}{2})$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z osom.

Rj: Za $t = \frac{\pi}{2}$ iz datog sistema f-ja dobijamo da je

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a(1-0) = a$$

$$z_0 = z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4a \sin\frac{\pi}{4} = 2a\sqrt{2}$$

pa je $M_0\left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right), a, 2a\sqrt{2}\right)$

Prisjetimo se

Ako tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada krivoj $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t \in I \end{cases}$

tada jednačina tangente na krivu $L$ u tački $M_0$ glasi

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

gdje je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq 0$ $\left(\vec{a} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))\right)$ vektor tangente.

$x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$, $z' = 4a \cos\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2a\cos\frac{t}{2}$

$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$, $z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\, a$

$$\Rightarrow \frac{x - a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1} = \frac{y - a}{1} = \frac{z - 2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$ jednačina tražene tangente

Odredimo ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z-osom.

Vektor tangente u tački $M_0$ je $\vec{t}=(1,1,\sqrt{2})$.
z-osa ima vektor pravca $\vec{p}=(0,0,1)$

$$\vec{p}\cdot\vec{t}=|\vec{p}||\vec{t}|\cos\measuredangle(\vec{p},\vec{t}) \Rightarrow \cos\measuredangle(\vec{p},\vec{t})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{t}}{|\vec{p}||\vec{t}|}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{t}=\sqrt{2}$$

$$|\vec{p}|=1, \quad |\vec{t}|=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\measuredangle(\vec{p},\vec{t})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ugao između tangente i z-ose je $\frac{\pi}{4}$ rad.

(#) Naći ugao između tangente na krivu

$$x = a\cos t$$
$$y = a\sin t$$
$$z = bt$$

i vektora $\vec{r}$ koji spaja koordinatni početak sa tačkom dodira.

Rj.

Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru kriva zadana jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, ili u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ vektor tangente određujemo formulama:

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} \qquad \left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

Vektor tangente na datu krivu u tački $t$ je

$$\vec{t} = (-a\sin t, a\cos t, b).$$

Primetimo da nije data konkretno neka tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ u kojoj tražimo tangentu na krivoj. Zbog ovoga, promjenjivu $t$ možemo tumačiti fiksiranom. Ugao između tangente na krivu i vektora $\vec{r}$ je jednak uglu između vektora tangente $\vec{t}$ i vektora $\vec{r}$.

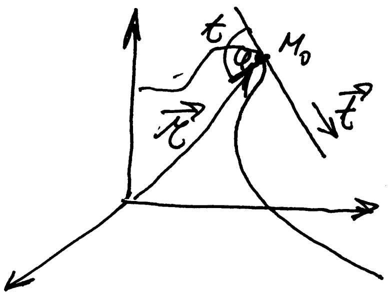
Vektor $\vec{r}$ koji spaja koordinatni početak sa tačkom dodira $t$ izgleda

$$\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

Znamo $\vec{t}\cdot\vec{r} = |\vec{t}||\vec{r}|\cos\measuredangle(\vec{t}, \vec{r})$

$$\cos\measuredangle(\vec{t}, \vec{r}) = \frac{\vec{t}\cdot\vec{r}}{|\vec{t}||\vec{r}|} = \frac{-a^2\sin t\cos t + a^2\sin t\cos t + b^2 t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2 t^2}}$$

$$\cos\measuredangle(\vec{t}, \vec{r}) = \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2t^2}}$$



(#) U kojim tačkama krive $L: x=3t-t^3,\ y=3t^2,\ z=3t+t^3$ je tangenta krive paralelna ravni $3x+y+z+2=0$?

Upute:

Vektor tangente u proizvoljnoj tački je oblika

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = 3(1-t^2, 2t, 1+t^2),$$

pa za vektor tangente možemo uzeti vektor $\vec{t}=(1-t^2, 2t, 1+t^2)$.

Vektor normale date ravni je

$$\vec{n}=(3,1,1)$$

Da bi tangente krive bile paralelne ravni neophodno je $\vec{t}\perp\vec{n}$ tj. $\vec{t}\cdot\vec{n}=0$, što daje jednačinu

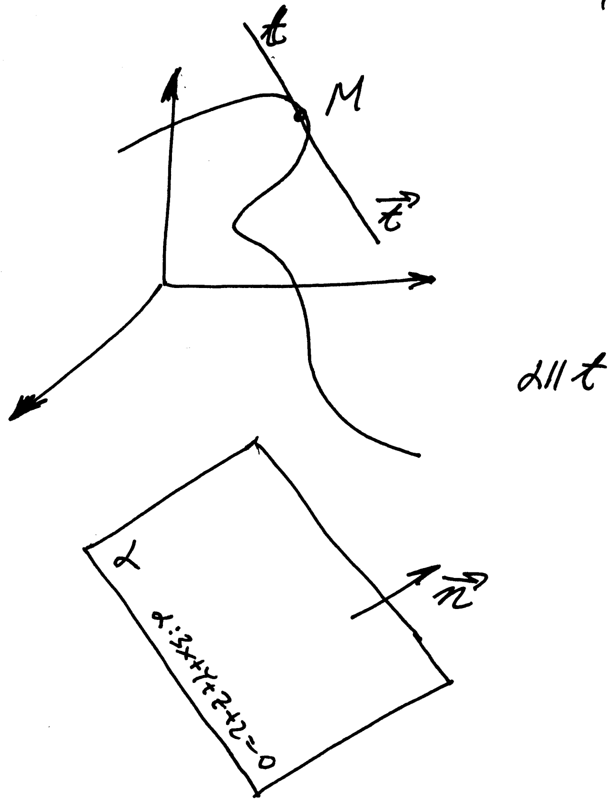
$$t^2-t-2=0.$$

Odavde je $t=-1$ ili $t=2$. Za $t=-1$ imamo tačku krive

$$M_1(-2,3,-4)$$

a za $t=2$ tačku

$$M_2(-2,12,14).$$



# Odrediti jednačinu tangente krive $L: x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t^2$ u tački $M_0(t=1)$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa x-osom.

Rj.

Za $t=1$ iz jednačine krive $L$ dobijamo

$$x_0 = e$$
$$y_0 = e^{-1}$$
$$z_0 = z(1) = 1$$

pa tražimo jednačinu tangente krive $L$ u tački $M_0(e, e^{-1}, 1)$.

Prisjetimo se

Ako tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada krivoj $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \\ t\in I \end{cases}$ tada jednačina tangente na krivu $L$ u tački $M_0$ glasi

$$\frac{x-x_0}{t_1} = \frac{y-y_0}{t_2} = \frac{z-z_0}{t_3}$$

gdje je $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$ vektor tangente $(\vec{t} = \vec{u})$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^t \\ \dot{y} &= -e^{-t} \\ \dot{z} &= 2t \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}(1) &= e \\ \dot{y}(1) &= -e^{-1} \\ \dot{z}(1) &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \vec{t} = (e, e^{-1}, 2)$$

Jednačina tangente u tački $M_0$ je $\frac{x-e}{e} = \frac{y-e^{-1}}{e^{-1}} = \frac{z-1}{2}$.

Da bi odredili ugao između tangente i x-ose, mi u stvari trebamo odrediti ugao između vektora tangente $\vec{t}$ i vektora pravca x-ose $\vec{p} = (1,0,0)$

$$\vec{p}\cdot\vec{t} = |\vec{p}|\cdot|\vec{t}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t}) \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{t}}{|\vec{p}||\vec{t}|}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{t}=(1,0,0)\cdot(e,e^{-1},2)=e$$

$$|\vec{n}|=1$$

$$|\vec{t}|=\sqrt{e^2+e^{-2}+4}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{n},\vec{t})=\frac{e}{\sqrt{e^2+e^{-2}+4}}$$

$$\sphericalangle(\vec{n},\vec{t})=\arccos\frac{e}{\sqrt{e^2+e^{-2}+4}}$$

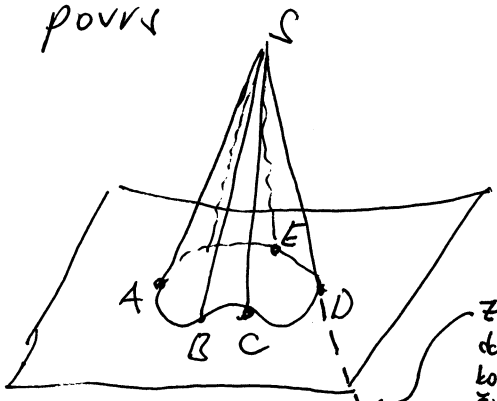
traženi ugao.

(#) Dokazati da kriva
$$x = e^t \cos t$$
$$y = e^t \sin t$$
$$z = e^t$$

siječe izvodnicu konusa na kojem kriva leži, pod konstantnim uglom.

Rj.

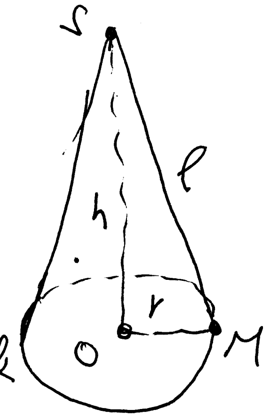
izvodnica (generatrisa) - prava koja pri svom kretanju siječe datu liniju i pri tom formira (opisuje) pravolinijsku površ




zamislite da ovaj konac čiji je kraj tačka S, pomjeramo po krivoj

primjer konusa

$p(S,A)$, $p(S,E)$, $p(S,D)$, $p(B,S)$, $p(C,S)$ su izvodnice




primjer kružnog konusa (osnova konusa je krug)

SM primjer izvodnice konusa

jednačine konusa
$$x^2+y^2=z^2$$
$$x^2+z^2=y^2$$
$$y^2+z^2=x^2$$
$$\vdots$$

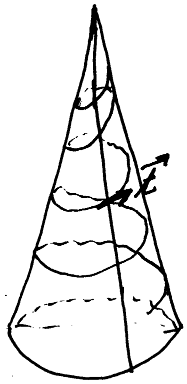
Pronađimo prvo jednačinu konusa na kojem kriva leži.
$$x^2+y^2=(e^t\cos t)^2+(e^t\sin t)^2=e^{2t}=z^2$$

$x^2+y^2=z^2$ ovo je jednačina kružnog konusa čije je tjeme u koordinatnom početku a osa simetrije je z-osa

Obilježimo sa $\vec{t}$ vektor tangente na krivu u nekoj tački M.

vektor tangente određujemo formulom
$$\vec{t}=\dot{\vec{r}} \quad \left(\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$\vec{t} = (e^t\cos t + e^t(-\sin t),\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t)$$
$$= (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t),\ e^t)$$



Obilježimo sa $\vec{r}$ vektor položaja tačke $M$

$$\vec{r} = (e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$$

Znamo

$$\vec{t}\cdot\vec{r} = |\vec{t}|\,|\vec{r}|\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{r})$$

Zbog činjenice da je vrh konusa u tjemenu koordinatnog početka ugao $\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{r})$ treba da bude konstantan (tim dokazom bi završili zadatak):

$$|\vec{t}| = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} =$$
$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \cancel{2\cos t\sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\sin t\cos t} + \cos^2 t + 1)}$$
$$= e^t\sqrt{3}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} = e^t\sqrt{2}$$

$$\vec{t}\cdot\vec{r} = e^{2t}(\cos^2 t - \cos t\sin t) + e^{2t}(\sin^2 t + \cos t\sin t) + e^{2t}$$
$$= 2e^{2t}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{r}) = \frac{\vec{t}\cdot\vec{r}}{|\vec{t}|\,|\vec{r}|} = \frac{2e^{2t}}{\sqrt{3}\,e^t\cdot\sqrt{2}\,e^t} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

time je tvrdnja zadatka dokazana.

$\#$ Vektor tangente $\vec{t} = \frac{1}{2t^2+9}(9, 6t, 2t^2)$ zaklapa isti ugao sa konstantnim pravcem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ (gdje je $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, $|\vec{p}| = 1$) bez obzira na vrijednost $t$. Odrediti pravac $\vec{p}$.

Upute:

$|\vec{t}| = 1$

$|\vec{p}| = 1$ $\qquad \vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\quad \vec{p} = ?$ tj. $p_1 = ?, p_2 = ?, p_3 = ?$

$$\vec{t} \cdot \vec{p} = |\vec{t}| \cdot |\vec{p}| \cdot \underbrace{\cos \overbrace{\measuredangle(\vec{t}, \vec{p})}^{=\alpha}}_{=c} = c$$

$$\vec{t} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2t^2+9}(9p_1 + 6tp_2 + 2t^2 p_3) = c$$

$$9p_1 + 6tp_2 + 2t^2 p_2 = c(2t^2+9)$$

$$(2p_3 - 2c)t^2 + 6p_2 t + 9(p_1 - c) = 0$$

$$p_3 = c, \quad p_2 = 0, \quad p_1 = c$$

$$|\vec{p}| = 1, \quad \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2c} = 1$$

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{p}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{p}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

# Dokazati da tangente na krivu $C: \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$ obrazuju konstantan ugao sa pravcem koji ima vektor pravca $\vec{a} = (1, 0, 1)$.

Rj.

Napišimo jednačinu krive $C$ u parametarskom obliku

$$x = t \Rightarrow 3y = t^2$$
$$y = \frac{1}{3}t^2 \qquad z = \frac{2}{9}xy$$
$$z = \frac{2}{9}t \cdot \frac{1}{3}t^2$$

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}t^2 \\ z = \frac{2}{27}t^3 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Posmatrajmo vektor $\vec{a} = (1, 0, 1)$ i obilježimo sa $\alpha$ ugao između $\vec{t}$ i $\vec{a}$.

$$\vec{t} \cdot \vec{a} = |\vec{t}|\,|\vec{a}| \cos\alpha$$

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} = \left(1, \frac{2}{3}t, \frac{2}{9}t^2\right)$$

vektor tangente

$$\cos\alpha = \frac{\vec{t} \cdot \vec{a}}{|\vec{t}|\,|\vec{a}|}$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{81}t^4} = \sqrt{\frac{1}{81}}\sqrt{81 + 9 \cdot 4t^2 + 4t^4} = \frac{1}{9}\sqrt{(2t^2+9)^2} = \frac{2}{9}t^2 + 1$$

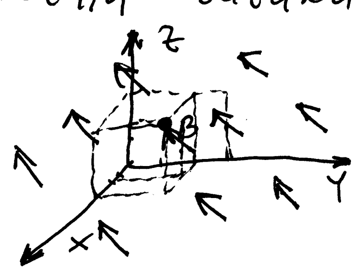
$$\vec{t} \cdot \vec{a} = 1 + \frac{2}{9}t^2$$

$$\cos\alpha = \frac{1 + \frac{2}{9}t^2}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{2}{9}t^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ovo znači da svaki vektor tangente krive $C$ zaklapa sa vektorom $\vec{a}$ ugao od $\frac{\pi}{4}$.

Navedimo primjer konkretnih tačaka koje imaju vektor pravca $\vec{a} = (1, 0, 1)$

$A(2, 2, 2)$, $B(3, 2, 3)$: $\vec{AB} = (1, 0, 1)$




$C(-4, 2, 3)$, $D(-3, 2, 4)$: $\vec{CD} = (1, 0, 1)$

$E(7, -2, 3)$, $F(8, -2, 4)$: $\vec{EF} = (1, 0, 1)$

(#) Pokazati da tangente krive $C: \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$

zatvaraju stalan ugao sa jednim konstantnim pravcem. Naći taj pravac i taj ugao.

Rj. Napišimo prvo jednačinu date krive $C$ u vektorskom obliku. Pokušajmo je parametrizivati pomoću familije pravih.

Stavimo $x = t \Rightarrow y = \frac{1}{3}t^2$

$$2 \cdot t \cdot \frac{1}{3}t^2 = 9z \Rightarrow z = \frac{2}{27}t^3$$

Prema tome $C: \vec{r} = (t, \frac{1}{3}t^2, \frac{2}{27}t^3)$.

Odredimo vektor tangente na datu krivu

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, \frac{2}{3}t, \frac{2}{9}t^2)$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{81}t^4} = \sqrt{\frac{1}{81}}\sqrt{81 + 9 \cdot 4t^2 + 4t^4} = \frac{1}{9}\sqrt{\underbrace{4t^4 + 36t^2 + 81}_{(2t^2+9)^2}}$$

$$|\vec{t}| = \frac{1}{9}(2t^2 + 9)$$

$$\vec{t}_0 = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \frac{(9, 6t, 2t^2)}{2t^2 + 9}$$ jedinični vektor tangente

Neka je $\vec{p}_0 = (p_1, p_2, p_3)$ jedinični vektor traženog pravca.

$$\vec{t}_0 \cdot \vec{p}_0 = |\vec{t}_0||\vec{p}_0| \cos \underbrace{\measuredangle(\vec{t}_0, \vec{p}_0)}_{\substack{\text{prema pretpostavci} \\ \text{ovo je uvijek isti ugao} \\ \text{(ovo treba biti)}}} = 1 \cdot 1 \cdot \text{constanta} = c$$

$$\vec{t}_0 \cdot \vec{p}_0 = \frac{1}{2t^2 + 9}\left[9p_1 + 6tp_2 + 2t^2 p_3\right] = c$$

$$9p_1 + 6tp_2 + 2t^2 p_3 = c(2t^2 + 9)$$

$$(2p_3-2c)t^2+6p_2 t+9(p_1-c)=0$$

primjetimo sad da će ova jednačina identički po $t$ biti zadovoljena akko

$$p_3=c,\ p_2=0,\ p_1=c$$

Koristeći još uslov $|\vec{p}|=1$, dobija se $\sqrt{2c^2}=1$

$$c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

1°

$$\vec{p}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Sada ako u jednačini vektora tangente $\vec{t}=(1,\frac{2}{3}t,\frac{2}{9}t^2)$ uzmemo neko konkretno $t$ npr. $t=3$ imamo $\vec{t}=(1,2,2)$

(smijemo uzeti proizvoljno $t$ zato što sve tangente krive zatvaraju isti ugao sa pravcem $\vec{p}$)

$$\vec{t}\cdot\vec{p}_0=\frac{1}{\sqrt{2}}+0+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$|\vec{t}|=\sqrt{9}=3$$

$$|\vec{p}_0|=1$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{p}_0)=\frac{\vec{t}\cdot\vec{p}_0}{|\vec{t}||\vec{p}_0|}=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ traženi ugao

2° $\vec{p}_0=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\vec{t}=(1,2,2)$$

$$t\cdot\vec{p}_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$|\vec{t}|=3$$

$$|\vec{p}_0|=1$$

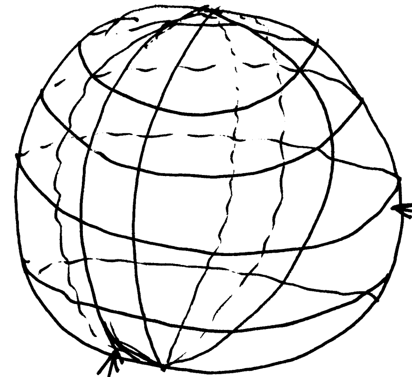
$$\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{p}_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\theta=\frac{3\pi}{4}$ traženi ugao

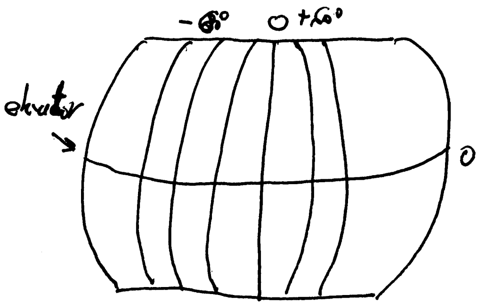
(na osnovu 1° ovo je i trebalo dobiti)

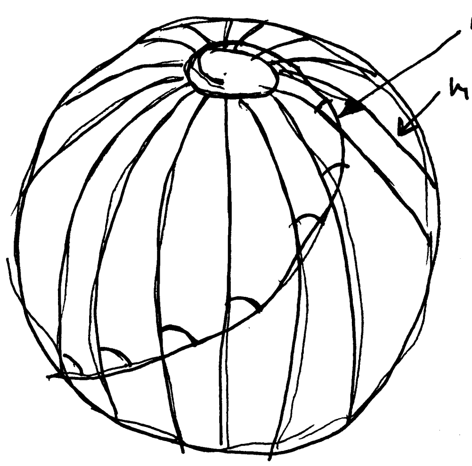
(#) Kriva koja se naziva loksodroma određena je jednačinom $\phi = a \ln tg(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$, čiji je prvi izvod po $\theta$ gdje je $\theta$ geografska širina a $\phi$ dužina tačke na sferi. Dokazati da ona siječe merdijane sfere pod uglom $\alpha$ tako da je $tg\,\alpha = a$. (Isto tako poznato je da $\phi'(\theta) = -\frac{a}{\cos\theta}$).

Rj.




Na geografskoj karti




Po definiciji loksodroma je linija dvostruke krivine, koja leži na sferi, sferoidu ili bilo kakvoj drugoj obrtnoj površi.

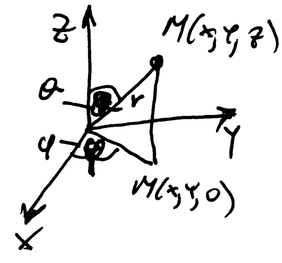
Jednačina sfere u polarnom obliku je (može biti)

$$x = r\cos\theta\cos\phi$$
$$y = r\cos\theta\sin\phi$$
$$z = r\sin\theta$$

Kako je loksodroma na nekoj sferi poluprečnika $r$ to je njena jednačina u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\cos\theta\sin\phi \\ z = r\sin\theta \\ \phi = a\ln tg(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

parametar je $\theta$ ($r$ je fiksirano)



vektor tangente određujemo formulom $\vec{t} = \dot{\vec{r}}$ $\left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$

vektor tangente na loksodromu je

$$\vec{t} = \big(-r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta(-\sin\phi)\cdot\phi',\; -r\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\cos\phi\cdot\phi',\; r\cos\theta\big)$$

prema postavci zadatka $\phi' = -\frac{a}{\cos\theta}$

$$\big(-r\sin\theta\cos\phi + ra\sin\phi,\; -r\sin\theta\sin\phi - ra\cos\phi,\; r\cos\theta\big)$$

Jednačina merdijana sa dužinom $\phi$ je

$$x = r\cos\theta\cos\phi$$
$$y = r\cos\theta\sin\phi$$
$$z = r\sin\theta$$

gdje je $r$ i $\phi$ fiksirano, a promjenjiva je $\theta$

Vektor tangente $\vec{t_1}$ na merdijan u proizvoljnoj tački $\theta$ je

$$\vec{t_1} = (-r\sin\theta\cos\phi,\; -r\sin\theta\sin\phi,\; r\cos\theta).$$

$$\vec{t}\cdot\vec{t_1} = |\vec{t}||\vec{t_1}|\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) = \frac{\vec{t}\cdot\vec{t_1}}{|\vec{t}||\vec{t_1}|}$$

$$\vec{t}\cdot\vec{t_1} = r^2\sin^2\theta\cos^2\phi \underline{- ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi} + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + \underline{+ ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi} + r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1} + r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$$|\vec{t}|^2 = \underline{r^2\sin^2\theta\cos^2\phi} \overbrace{\;}^{-2ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi} + \underline{r^2a^2\sin^2\phi} + \underline{r^2\sin^2\theta\sin^2\phi} \overbrace{\;}^{+2ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi} + \underline{r^2a^2\cos^2\phi} + r^2\cos^2\theta$$

$$= \underline{r^2\sin^2\theta} + r^2a^2 + \underline{r^2\cos^2\theta} = r^2 + r^2a^2 \Rightarrow |\vec{t}| = r\sqrt{1+a^2}$$

Slično $|\vec{t_1}| = r \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) = \frac{r^2}{r^2\sqrt{1+a^2}}$

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = a$$

q.e.d.

$$S : F(x,y,z) = 0 \tag{6}$$

(*implicitni* oblik).

1° Ako tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada $L$, tj. ako se koordinate $x_0$, $y_0$, $z_0$ te tačke dobijaju iz sistema (1) za neko $t = t_0$ (ako je u pitanju parametarski oblik), ili za $x = x_0$ iz (2), ili, pak, zadovoljavaju sistem (3), tada *jednačina tangente na krivu $L$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$* glasi:

$$\tau : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{7}$$

gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$ vektor tangente, koji u zavisnosti od načina zadavanja krive $L$ ((1), (2) ili (3)) ima redom oblik:

$$\vec{a} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)); \tag{8}$$

$$\vec{a} = (1, y'(x_0), z'(x_0)); \tag{9}$$

$$\vec{a} = \left( \begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1z} & F'_{1x} \\ F'_{2z} & F'_{2x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix} \right) \tag{10}$$

(gde su svi parcijalni izvodi izračunati u tački $M_0$).

*Jednačina normalne ravni $\eta$ krive $L$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$* glasi:

$$\eta : a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) = 0, \tag{11}$$

gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $(\neq \vec{0})$ vektor tangente krive $L$ u tački $M_0$, a koji ima prethodno spomenute oblike (zavisno od načina zadavanja krive $L$).

2° *Jednačina tangentne ravni površi $S$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$* te površi glasi:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{12}$$

gde je $\vec{n} = (A, B, C)$ vektor normale te površi u tački $M_0$. U zavisnosti od oblika jednačine površi $S$, (4), (5) ili (6), imamo redom sledeće vrednosti vektora $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \left( \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \right) \tag{13}$$

gde su parcijalni izvodi izračunati za $u = u_0$ i $v = v_0$, koji odgovaraju tački $M_0$;

$$\vec{n} = (z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), -1); \tag{14}$$

$$\vec{n} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)). \tag{15}$$

*Jednačine normale površi u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$* te površi glase:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C},$$

gde je $\vec{n} = (A, B, C)$ prethodno spomenuti vektor normale površi koji ima jedan od oblika (13), (14) ili (15).